UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des groupes

Examen – Session 2

Vous disposez de **2 heures** pour répondre aux questions des exercices suivants. Les documents et calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs. **Toutes les réponses devront être dûment justifiées**. Cet énoncé comporte 2 pages.

Exercice 1

Soit G un groupe un groupe cyclique d'ordre $n \geq 2$, engendré par l'élément x. Montrer que l'ensemble des générateurs du groupe G est formé par les éléments x^k tels que les entiers k et n sont premiers entre eux.

Exercice 2

Répondre par « vrai » ou « faux » aux questions suivantes. *Répondre « vrai » implique que vous donniez une preuve complète et valide de l'assertion ; répondre « faux » implique que vous donniez une preuve complète et valide de la négation de l'assertion proposée.*

1) Soient G, G' deux groupes finis, d'ordres premiers entre eux. Les groupes G et G' sont cycliques si et seulement si le produit direct $G \times G'$ est un groupe cyclique.

2) Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Alors le sous-groupe H est normal dans G si et seulement si $[G : H] = 2$.

Exercice 3

Soit $p \in \mathbf{N}$ un nombre premier. On note

$$\mathfrak{Q}_p = \left\{ \frac{a}{p^n} \ ; \ a \in \mathbf{Z}, \ n \in \mathbf{N} \right\}.$$

1) Vérifier que $\mathfrak{Q}_p$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Q}, +)$ et que $\mathfrak{Q}_p = \cup_{n\in\mathbf{N}} \langle \frac{1}{p^n} \rangle$.

2) Montrer que l'application $f : \mathfrak{Q}_p \to \mathfrak{Q}_p$ définie par $x \mapsto px$ est une permutation de $\mathfrak{Q}_p$.

3) L'application f est-elle un automorphisme du groupe $(\mathfrak{Q}_p, +)$. (*La réponse devra être justifiée.)*

Exercice 4

Nous rappelons que, si G est un groupe, alors son centre $Z(G)$ est défini comme l'ensemble

$$Z(G) = \{x \in G \ ; \ \forall \ a \in G, \ xa = ax\}.$$

Soit $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes. On considère Γ l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pour tous les nombres complexes a, b, c.

1) Vérifier que Γ est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathbf{GL}_3(\mathbf{C})$.

2) Montrer que $Z(\Gamma)$ est isomorphe à $\mathbf{C}$.

3) Justifier que le groupe quotient $\Gamma/Z(\Gamma)$ existe, puis prouver que ce groupe $\Gamma/Z(\Gamma)$ est isomorphe à $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$.

Exercice 5

1) Montrer que le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ des automorphismes du groupe $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}, +)$ est isomorphe au groupe $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, +)$.

2) Décrire l'ensemble $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

3) Décrire l'ensemble $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

4) Donner un groupe d'ordre 12 non abélien possédant un unique 3-sous-groupe de Sylow. (*Vous devrez vérifier que votre candidat a les propriétés voulues.*)

5) Combien existe-t-il de tels groupes ?