

Questions de cours de mathématiques

Lycée Loritz

PTSI - 2023-2024

Logique, ensembles, raisonnements

- Table de vérité de l'implication.
- Négation d'un Et, négation d'un Ou.
- Définition de l'implication.
- Négation de l'implication.
- Définition de l'équivalence.
- Définition de la réciproque.
- Définition de la contraposée + Théorème sur la contraposée.
- Définitions des quantificateurs.
- Négation d'une assertion commençant par $\forall$ ou $\exists$.
- Opérations ensemblistes : Union, intersection, complémentaire, différence, parties disjointes.
- Produit cartésien d'ensembles.
- Principe de récurrence.
- Principe de récurrence double.
- Principe de récurrence fort.
-

Inégalités

- Propriétés fondamentales de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
- Propriétés des inégalités.
- Définition de la valeur absolue.
- Propriétés de la valeur absolue.
- Inégalité triangulaire.
- Opérations élémentaires sur un système linéaire.
- Inconnues principales et auxiliaires, équations principales et secondaires dans un système réduit.
-

Trigonométrie

- Définition de cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel.
- Formulaire de trigonométrie.
- Limites classiques de trigonométrie.
- Corollaire sur $|\sin(x)|$.
- Formulaire de trigonométrie.
- Limites classiques de trigonométrie.
- Dérivées des fonctions trigonométriques.
-

Nombres complexes

- Forme algébrique d'un complexe.
- Sens de la notation $i\mathbb{R}$.
- Vocabulaire de la géométrie. (Affixe, image, etc...)
- Conjugué d'un complexe.
- Formules donnant $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ en fonction de z et $\bar{z}$.
- Propriétés du conjugué.
- Module d'un complexe.
- Propriétés du module.
- Inégalité triangulaire (y compris le cas d'égalité).
- Forme trigonométrique des complexes.
- Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique.
- Notation exponentielle.
- Propriétés de la notation exponentielle.
- Formules d'Euler.
- Formule de Moivre.
- Définition de l'exponentielle complexe.
-

Sommes, produits, binômes de Newton

- Sommes classiques.
- Propriétés de factorisation/découpage/scission dans les sommes.
- Propriétés de factorisation/découpage/scission dans les sommes.
- Calcul de somme télescopique.
- Décalage d'indice dans les sommes.
- Propriétés des produits.
- Définition des coefficients binomiaux.
- Symétrie des coefficients binomiaux.

- Formule de Pascal.
- Formule du binôme de Newton.
- Factorisation de $x^n - y^n$.
- Linéarisation de $\cos(\theta)^3$.
- Découpage ligne ou colonne d'une somme double sur un rectangle.
- Découpage ligne ou colonne d'une somme double sur un triangle.
-

Révisions d'analyse, fonctions usuelles

- Définitions de fonction composée.
- Définitions de fonctions paires et impaires.
- Définition de périodique.
- Écrire avec quantificateurs les définitions de majorée, minorée, bornée, maximum, minimum.
- Écrire avec quantificateurs les définitions de monotonie.
- Tableaux des opérations sur les limites.
- Tableau des dérivées classiques.
- Dérivée d'une composée.
- Propriétés de l'exponentielle.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.
- Définition de ch et sh (Définition formelle + formule).
- Dérivées de ch et sh.
- Tableaux de variations de ch et sh.
- Propriétés du logarithme népérien (règles de calcul sur le produit, le quotient, les puissances).
- Limites classiques du logarithme : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)$.
- Définition de la fonction puissance d'exposant a pour tout a réel.
- Propriétés de la fonction puissance d'exposant a pour tout a réel.
- Croissance comparée du logarithme népérien et des fonctions puissances.
- Croissance comparée de l'exponentielle et des fonctions puissances.
- Allures des courbes des fonctions du chapitre 7.
-

Fonctions circulaires réciproques

- Définition de bijection.
- Proposition sur les fonctions strictement monotones continues.
- Résultat sur la dérivée de la bijection réciproque.
- Arc-tangente : Définition, propriétés, allure de la courbe.
- Arc-sinus : Définition, propriétés, allure de la courbe.
- Arc-cosinus : Définition, propriétés, allure de la courbe.
-

Géométrie et équations complexes

- Factorisation par $(x - \alpha)$ si α est une racine de P .
- Racines carrées d'un complexe.
- Théorème sur les équations du second degré.
- Relations coefficients-racines.
- Racines n -ièmes de l'unité.
- Racines n -ièmes d'un complexe.
- Proposition sur le lien entre rapport et géométrie.
- Représentations des transformations du plan par des fonctions complexes.
- Dérivabilité des fonctions à valeurs complexes.
- Dérivation de $t \mapsto \exp(\varphi(t))$ lorsque $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$.
-

Calculs de primitives et d'intégrales

- Proposition 3.
- Proposition sur la forme des primitives d'une fonction continue.
- Primitives usuelles.
- Définition de fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
- Théorème d'intégration par partie.
- Théorème d'intégration par changement de variable.
-

Équations différentielles linéaires

- Solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.
- Résultat sur la structure des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
- Unicité de la solution au problème de Cauchy.
- Solutions à valeurs complexes d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène.
- Solutions à valeurs réelles d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène.
- Résultat sur la structure des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
- Forme à utiliser pour la recherche de solutions particulières à l'ordre 2, dans les cas où le second membre est d'une des formes suivantes : Polynôme et $t \mapsto e^{kt}$.
-

Ensembles et applications

- Décrire $\mathcal{P}(E)$ lorsque $E = \{1, 2, 3\}$.
- Image directe et image réciproque d'un ensemble par une application.
- Définitions d'une application injective (toutes).
- Définitions d'une application surjective (toutes).

- Définitions d'une application bijective (toutes).
- Composées et XXX-jections.
- Définition d'une partition et d'un recouvrement disjoint.
-

Arithmétique

- Définition de la divisibilité dans $\mathbb{N}$.
- Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
- Définition d'un nombre premier.
- Définitions du PGCD et du PPCM.
- Théorème de décomposition d'un nombre en facteurs premiers.
- Application de la décomposition en facteurs premiers à la recherche de PGCD et PPCM.
-

Nombres réels

- Définition d'une partie minorée, majorée, bornée.
- Définition de plus grand élément et de plus petit élément.
- Définition de borne supérieure et de borne inférieure.
- Théorème de la borne supérieure.
- Définition d'un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Opérations dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- Définition et graphe de la fonction partie entière.
-

Suites

- Définitions classiques des suites : croissante, décroissante, bornée, majorée, minorée, constante, stationnaire.
- Définition d'une suite convergeant vers une limite finie avec des quantificateurs.
- Résultat.
- Définition d'une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Définition d'une suite extraite.
- Méthode pour prouver qu'une suite n'a pas de limite.
- Passage à la limite dans les inégalités.
- Théorème des gendarmes.
- Théorème de la limite monotone.
- Définition de suites adjacentes.
- Théorème des suites adjacentes.
- Croissances comparées de suites.
- Passage à la limite dans les inégalités.
- Suites récurrentes doubles (réelles et complexes).
-

Polynômes

- Écriture de la multiplication interne dans les polynômes avec indéterminée. (section I.2)
- Définition du degré d'un polynôme.
- Polynôme dérivé.
- Toutes les relations sur le degré (Somme, produit, composée, dérivées n -ièmes)
- Dérivées successives de X^n .
- Formule de Leibniz
- Théorème de Taylor.
- Théorème de la division euclidienne des polynômes.
- Définition des racines de multiplicité quelconque.
- Caractérisation des racines de multiplicité n .
- Décomposition des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$.
- Décomposition des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$.
- Relations coefficients-racines.
- Décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles à pôles simples.
-

Matrices

- Définition du produit matriciel.
- Savoir effectuer les opérations matricielles de base (addition, multiplication scalaire, multiplication matricielle, transposée)
- Matrice élémentaire.
- Opérations élémentaires et leur traduction matricielle.
- Définition de matrices triangulaires, diagonales, scalaires.
- Formule du binôme pour les matrices carrées.
- Définition de matrice inversible.
- Inverse d'un produit.
- Définition de matrices symétriques et antisymétriques.
- Calcul d'inverse.
-

Limites des fonctions réelles

- Définition d'une limite finie ou infinie en un point de $\mathbb{R}$ ou en $\pm\infty$.
- Proposition sur la limite de la composée de deux fonctions.
- Théorème de passage à la limite dans les inégalités.
- Théorème des gendarmes.
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Théorème sur les fonctions monotones.
-

Continuité des fonctions réelles

- Définition de la continuité en un point.
- Résultats sur la composition et la continuité.
- Proposition liant continuité et suites convergentes.
- Corollaire sur les suites récurrentes convergentes.
- Théorème des valeurs intermédiaires, version préliminaire.
- Théorème des valeurs intermédiaires.
- Théorème des valeurs intermédiaires, version généralisée à un intervalle ouvert.
- Théorème des bornes atteintes.
- Corollaire sur les suites récurrentes.
- Lien entre stricte monotonie et injection.
- Théorème de la bijection.
-

Dérivabilité des fonctions réelles

- Définition d'une fonction réelle dérivable en un point.
- Développement limité d'ordre 1.
- Dérivée d'une composée.
- Dérivée de la bijection réciproque.
- Théorème de Rolle.
- Égalité des accroissements finis.
- Inégalité des accroissements finis, version 2.
- Théorème de la limite de la dérivée.
- Théorème de Leibniz.
- Point critique et extremum local.
-

Comparaisons locales des fonctions

- Caractérisation de la domination.
- Caractérisation de la négligeabilité.
- Caractérisation des fonctions équivalentes par le quotient.
- Croissances comparées, le retour.
- Changement de variable dans un équivalent.
- Équivalents classiques.
- Équivalents classiques des suites.
-

Développements limités

- Formule de Taylor-Young.
- Développement limité en 0.
- Développement limité en a .
- Intégration d'un développement limité.
- Développements limités usuels.
-

Suites récurrentes

- Parties stables et suites récurrentes.
-

Géométrie plane

- Définition du produit scalaire dans le plan.
- Propriétés du produit scalaire.
- Formule du produit scalaire dans une base orthonormale.
- Identités liées au produit scalaire.
- Définition du produit mixte dans le plan.
- Formule du produit mixte dans une base orthonormale directe.
- Savoir trouver un vecteur directeur et un vecteur normal à une droite à partir de son équation cartésienne dans un repère orthonormé.
- Distance d'un point à une droite dans le plan.
- Nature de l'intersection d'un cercle et d'une droite.
-

Géométrie spatiale

- Définition d'un plan affine de l'espace.
- Définition du produit scalaire dans l'espace + Formule.
- Définition du produit vectoriel dans l'espace + Formule.
- Définition du produit mixte dans l'espace + Formule.
- Calcul de déterminant 3×3 .
- Équations de plans.
- Distance d'un point à un plan.
- Système d'équations d'une droite.
- Équations de sphères.
- Intersection sphère-plan.
-

Espaces vectoriels

- Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie.
- Sous-espace vectoriel. Définition et caractérisation.
- Intersection de sous-espaces vectoriels.
- Définition de somme de sous-espaces vectoriels.
- Définition de sous-espaces en somme directe.
- Définition de sous-espaces supplémentaires.
- Caractérisations 1 et 2 d'espaces supplémentaires.
-

Dimensions des espaces vectoriels

- Définition de familles libres et liées.
- Définition de famille génératrice.
- Définition de base.
- Que peut-on dire d'une famille de polynôme non-nuls de degrés différents ?
- Théorème de la base incomplète.
- Existence d'une base en dimension finie.
- Définition de la dimension.
- Théorème sur les cardinaux des familles et leurs caractères libres/génératrices.
- Bases et supplémentaires.
- Caractérisation des supplémentaires en dimension finie.
- Formule de Grassmann.
-

Applications linéaires

- Définition d'une application linéaire.
- Noyau et image.
- Définition de endomorphismes, isomorphismes, automorphismes.
- Lien entre injectivité et noyau.
- Définition d'une application linéaire d'après l'image d'une base.
- Résultat sur l'image d'une famille génératrice.
- Définition du rang d'une application linéaire.
- Théorème reliant tout.
- Théorème du rang.
- Définition d'un projecteur et d'une symétrie.
- Représentation graphique des projecteurs et symétries.
- Caractérisation des projecteurs et symétries.
-

Matrices en algèbre linéaire

- Définition de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- Écrire la matrice d'un endomorphisme dans des bases.
- Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Matrice d'une composée.
- Lien entre matrice inversible et application linéaire bijective.
- Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
- Définition de matrice de passage.
- Changement de base d'un endomorphisme.
- Rang d'une application linéaire.
-

Déterminants

- Déterminants de matrices diagonales et triangulaires.
- Déterminant d'un produit.
- Déterminant et inversibilité.
- Déterminant et transposée.
- Déterminant d'une matrice 2×2 .
- Cas de nullité du déterminant.
- $\det(\lambda A)$.
- Développer un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- Déterminant d'une famille et base.
- Déterminant d'un endomorphisme.
-

Dénombrement et cardinaux

- Définition de la factorielle. (révision)
- Définition des coefficients binomiaux. (révision)
- Définition d'injectivité/surjectivité/bijektivité. (révision)
- Parties d'un ensemble. (révision)
- Opérations sur les ensembles (y compris unions et intersections infinies). (révision)
- Lien entre cardinal et injectivité/surjectivité/bijektivité.
- Cardinal d'une union (pas forcément disjointe).
- Cardinal d'un produit cartésien.
- Nombre de p -uplets d'un ensemble à n éléments.
- Cardinal de $\mathcal{F}(E, F)$ pour E et F finis.
- Cardinal de $\mathcal{P}(E)$ pour E fini.
- Définition des p -arrangements et nombre de p -arrangements d'un ensemble à n éléments.
- Définition de permutation et nombre de permutations d'un ensemble fini.
- Nombre de parties à p éléments dans un ensemble de cardinal n .
-

Probabilités, variables aléatoires, lois

- Vocabulaire sur les probas.
- Définition d'un système complet d'évènements.
- Définition d'une probabilité.
- Propriétés des probabilités.
- Variable aléatoire.
- Univers image.
- Loi de probabilité.
- Loi de Bernoulli.
- Loi binomiale.
- Loi uniforme.
-

Conditionnement, indépendance

- Définition de probabilité conditionnelle.
- Formule des probabilités composées.
- Formule des probabilités totales.
- Définition d'indépendance de deux événements.
- Définition d'indépendance de plus de deux événements.
-

Espérance, variance

- Définition de l'espérance.
- Propriétés de l'espérance.
- Formule de transfert.
- Définition de la variance.
- Propriétés de la variance.
- Formule de König-Huygens.
- Définition de variables aléatoires indépendantes.
- Somme de variables indépendantes suivant une même loi de Bernoulli.
- Définition et propriétés de la covariance.
- Propriétés sur les variables indépendantes (Variance et espérance).
- Espérance et variance de la loi uniforme.
- Espérance et variance de la loi de Bernoulli.
- Espérance et variance de la loi de binomiale.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
-

Intégration

- Propriétés de l'intégrale.
- Fonctions continues d'intégrales nulle.
- Sommes de Riemann, définition et théorème.
- Théorème fondamental de l'analyse.
- Taylor avec reste intégral.
- Taylor-Lagrange.
- Taylor-Young.
-

Séries

- Définition de séries et vocabulaires.
- Séries géométriques.
- Théorème de comparaison séries-intégrales.
- Théorème des séries de Riemann.
- Comparaison de SATP.
- Règle des équivalents.
- Théorème de convergence absolue.
-

Fonctions de deux variables

- Dérivée selon un vecteur (définition).
- Dérivées partielles (définition).
- Développement limité d'ordre 1 (théorème).
- Gradient (définition).
- Règle de la chaîne.
- Un extremum est un point critique, la réciproque est fausse.
-