Fiches de cours

par Axel Rogue, Lycée Loritz - PTSI

2024-2025

Chapitre 1
Logique, ensembles et raisonnements

Points de cours les plus importants

- Notions de contraposée + thm.
- Opérations sur les ensembles.
- Produit cartésien d'ensembles.
- Raisonnement par analyse-synthèse.
- Raisonnements par récurrence.

Méthodes et techniques à connaître

- Savoir écrire la négation d'une proposition.
- Comment montrer une implication.
- Comment montrer une équivalence.
- Comment montrer une assertion commençant par un quantificateur.
- Comment montrer l'inclusion ou l'égalité entre deux ensembles.
- Rédaction-type de l'analyse-synthèse.
- Rédaction-type des récurrences.

A garder à l'esprit

- Toute variable utilisée dans une démonstration doit être introduite, en précisant à quel ensemble elle appartient (En commençant par une phrase du genre « Soit $x \in \dots$ »).
- On ne peut pas échanger les blocs $\forall$ et les blocs $\exists$.
- L'utilisation du symbole $\Leftrightarrow$ est réservée au fait de dire que deux assertions sont équivalentes.
- La négation de $A \Rightarrow B$ n'est ni ($\text{non}\, A \Rightarrow \text{non}\, B$), ni ($B \Rightarrow A$). C'est ($A$ Et $\text{non}\, B$).
- On utilise pas d'équivalents dans les analyse-synthèses.... ni dans les récurrences !
- Lorsque l'on introduit, au début d'une récurrence, la propriété à démontrer, on doit présenter sous la forme : "Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose P_n :« ... »". Et on n'écrit surtout pas $\forall n \in \mathbb{N}$ à l'intérieur de la définition de P_n.

Chapitre 2
Inégalités, équations et inéquations

Points de cours les plus importants

- Comportement des inégalités vis-à-vis des opérations usuelles.
- Propriétés de la valeur absolue.
- Inégalité triangulaire.
- Opérations élémentaires sur les lignes d'un système.

Méthodes et techniques à connaître

- Savoir résoudre une équation par analyse-synthèse.
- Savoir résoudre une équation ou une inéquation par équivalences.
- Savoir manipuler les valeurs absolues dans les équations/inéquations.
- Obtenir une réduite de Gauss par algorithme du pivot de Gauss.
- Savoir déduire le nombre de solutions de la forme réduite.
- Savoir déduire l'ensemble des solutions de la forme réduite.

A garder à l'esprit

- Ne pas simplifier les équations par un terme qui dépend de l'inconnue.
- Ne pas multiplier ou diviser les inéquations par un terme dont le signe est variable, ou alors faire une disjonction de cas.
- Ne pas oublier la rédaction : les variables utilisées doivent être définies.
- Attention à justifier le signe avant de mettre une égalité au carré par équivalence.
- Lors de la résolution de systèmes linéaires, on raisonne par équivalence.
- On ne peut pas prendre 0 comme pivot.
- Avant de prendre comme pivot une valeur dépendant d'un paramètre, il faut distinguer les cas : Lorsqu'elle est nulle, et lorsqu'elle ne l'est pas.
- Lorsqu'il y a des inconnues secondaires, et qu'on les paramètre par λ (par exemple), attention à la rédaction. $(S) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \dots$.
- Lorsque l'on effectue des opérations sur les lignes, ne pas oublier d'agir aussi sur le second membre (les constantes après le "$=$").

Chapitre 3
Trigonométrie

Points de cours les plus importants

- Cercle trigonométrique.
- Formulaire de trigonométrie.
- Propriété des fonctions cos, sin et tan : Définition, parité, allure de la courbe, limites classiques en 0, dérivabilité.

Méthodes et techniques à connaître

- Retrouver les formules de trigonométries rapidement (au cas où on les a oublié).
- Dessiner un cercle trigonométrique et raisonner dessus, pour retrouver les formules de changement d'angle ou résoudre des équations.
- Résoudre les équations trigonométriques (notamment la méthode pour résoudre $A\cos(x) + B\sin(x) = C$).

A garder à l'esprit

- Ne pas oublier que la tangente n'est PAS définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- Lors de la résolution des équations trigonométriques, bien penser que les solutions obtenues le sont modulo 2π pour sin et cos et modulo π pour tan.
- Lors de la rédaction de la résolution d'équation par récurrence, il faut repréciser à chaque équivalence que : $\exists k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi + \dots$
- Ne pas se tromper dans les formules trigonométriques. Si on a un doute sur une formule cruciale pour la résolution d'un exercice, il vaut mieux prendre quelques secondes pour essayer de la retrouver ou a minima la tester sur quelques valeurs.

Chapitre 4
Le corps $\mathbb{C}$ des complexes

Points de cours les plus importants

- Conjugué d'un complexe.
- Définition du module.
- Inégalité triangulaire. (avec cas d'égalité)
- Formules d'Euler.
- Forme exponentielle.
- Le lien entre les complexes et la géométrie : Plan complexe, addition de vecteurs, homothéties, cercles.

Méthodes et techniques à connaître

- Être à l'aise en calcul, que ce soit sous forme exponentielle ou algébrique.
- Multiplication par $\frac{\overline{z}}{\overline{z}}$ pour obtenir la forme algébrique de $\frac{1}{z}$.
- Savoir passer efficacement d'une forme à l'autre (algébrique, trigonométrique, exponentielle).
- Méthode de factorisation par l'angle moitié.
- Multiplication par $(-1)\,\mathrm{e}^{i\pi}$ lorsque l'on a une forme $\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec ρ négatif.

A garder à l'esprit

- Ne JAMAIS écrire d'inégalités entre nombres complexes.
- Ne pas oublier qu'il y a un i au dénominateur dans la formule d'Euler du sinus.
- Bien vérifier que x et y sont réels avant d'affirmer que ce sont les parties réelles et imaginaires de $x+iy$.
- Ne pas prendre de logarithme en complexe ! ! Il n'est pas défini.
  On a bien $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'[2\pi]$, mais cela provient de la définition de $\mathrm{e}^{i\theta}$, ce n'est pas "un passage au log".
- Le module d'un complexe est toujours un **réel positif**. Lorsque qu'on obtient une forme $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$, ρ n'est le module de z que si il est positif !

Chapitre 5
Sommes, produits, binôme de Newton

Points de cours les plus importants

- Sommes classiques : Arithmétiques et géométriques, somme de carrés.
- Définition de la factorielle, des coefficients binomiaux.
- Formule de Pascal et symétrie des coefficients binomiaux.
- Formule du binôme de Newton.
- Formule de factorisation de $x^n - y^n$.

Méthodes et techniques à connaître

- Savoir réaliser un changement d'indice dans une somme ou un produit.
- Savoir réduire un produit en utilisant les factorielles.
- Linéarisation de polynômes trigonométriques.
- Transformation de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en polynôme trigonométrique.
- Calcul de sommes de fonctions circulaires.
- Avoir le « réflexe binôme de Newton » lorsqu'on voit un coefficient $\binom{n}{k}$ dans une somme.
- Savoir effectuer les découpages en lignes et en colonnes dans les sommes doubles.

A garder à l'esprit

- Il y a $n+1$ entiers entre 0 et n, et non pas n. Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1$ vaut $n+1$ et non pas n.
- La valeur finale de $\displaystyle\sum_{k=\ldots}^{\ldots} \ldots$ ou $\displaystyle\prod_{k=\ldots}^{\ldots} \ldots$ ne peut JAMAIS dépendre de k.
- Lorsque l'on calcule une somme géométrique, il faut soit traiter à part le cas où la raison est 1, soit justifier qu'elle ne peut pas valoir 1.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$ mais $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} a_k$.
- Attention au découpage des sommes doubles sur un triangle. Il faut bien regarder si les deux indices peuvent être égaux ou pas : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} \neq \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j}$.

Chapitre 6
Révisions de fonctions réelles

Points de cours les plus importants

- Définitions usuelles avec quantificateurs (monotonie, périodicité, parité, majorant, minorant, bornée, maximum, minimum).
- Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée de fonctions dérivables.
- Tableau des dérivées usuelles (y compris les domaines de dérivabilité).
- Connaître les liens entre propriétés de parité, périodicité et symétrie et les transformations géométriques des courbes représentatives.

Méthodes et techniques à connaître

- Etre capable de dériver des composées, même horriblement compliquées.
- Savoir mener en autonomie l'étude d'une fonction.
- Savoir comment réduire le domaine d'étude des fonctions par symétrie et périodicité.
- Savoir calculer des limites "simples" (c'est à dire quand on peut les déduire des opérations sur les limites).

A garder à l'esprit

- Une fonction ne peut être paire ou impaire que si son domaine de définition est symétrique par rapport à 0.
- Une fonction continue n'est pas forcément dérivable.
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie et continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.
- Une fonction ne peut pas être continue ou dérivable là où elle n'est pas définie.
- Les fonctions peuvent être dérivables, croissantes, continues, etc.... PAS les réels. Donc dire que $f(x)$ est croissante, dérivable, continue, etc... n'a pas de sens.
- La notation "prime" est réservée aux fonctions. On peut donc écrire $f'(x)$, mais pas $(x^2+3)'$.
- Ne pas confondre majorant/minorant avec maximum/minimum. Un majorant/minorant n'est pas forcément atteint.
- $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
- Le lien entre signe de la dérivée et variations de la fonction ne s'applique que sur un intervalle (Une fonction dont la dérivée est nulle sur $\mathbb{R}^*$ n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$).

Chapitre 7
Fonctions réelles usuelles

Points de cours les plus importants

- Définitions et expressions de ch et sh.
- LA formule de trigo hyperbolique. $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$.
- Propriétés algébriques de exp et ln.
- Différentes définitions des fonctions puissances selon les puissances. Notamment les différents domaines de définition et les dérivées.
- Croissances comparées.

Méthodes et techniques à connaître

- Passer à l'exponentielle pour étudier les fonctions du type $x \mapsto u(x)^{v(x)}$. (Et bien vérifier que $u(x) > 0$ pour cela).
- Faire un changement de variable pour se ramener à une croissance comparée.

A garder à l'esprit

- $\mathrm{e}^{-\ln(x)}$ N'EST PAS égal à $-x$, mais à $\frac{1}{x}$.
- Ne pas dériver $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ comme si c'était un polynôme : Par exemple, la dérivée de $x \mapsto 2^x$ est $x \mapsto \ln(2) \times 2^x$.
- Ne pas inventer de croissances comparées. Par exemple, la limite de $x\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ n'est pas une croissance comparée du cours. Il faut la justifier par un changement de variable.
- Ne pas invoquer les croissances comparées alors qu'on est pas devant une forme indéterminée (ou plus généralement lorsqu'elles ne s'appliquent pas).

Chapitre 8
Bijections et fonctions circulaires réciproques

Points de cours les plus importants

- Définition de bijection (et de "réalise une bijection").
- Résultat sur la dérivabilité de la réciproque d'une bijection.
- Proposition 8.10 sur les fonctions continues strictement monotones.
- Symétrie entre la courbe d'une bijection et celle de sa réciproque.
- Définition, continuité, imparité, domaine de dérivabilité, dérivée de Arcsin, allure de la courbe.
- Définition, continuité, domaine de dérivabilité, dérivée de Arccos, allure de la courbe.
- Définition, continuité, imparité, domaine de dérivabilité, dérivée de Arctan, allure de la courbe.

Méthodes et techniques à connaître

- Montrer qu'une fonction continue strictement monotone réalise une bijection et déterminer entre quels intervalles.
- Appliquer la proposition de dérivée de la réciproque pour retrouver les dérivées de Arcsin, Arccos et Arctan.

A garder à l'esprit

- Avant d'écrire $\mathrm{Arcsin}(x)$ ou $\mathrm{Arccos}(x)$, bien s'assurer que x est dans $[-1;1]$.
- Arcsin et Arccos ne sont pas dérivables en -1 et 1.
- Arctan est bien définie sur $\mathbb{R}$, contrairement à tan.
- $\mathrm{Arccos}(\cos(x))$, $\mathrm{Arcsin}(\sin(x))$ et $\mathrm{Arctan}(\tan(x))$ ne sont en général pas égaux à x, à moins que x ne soit dans le bon intervalle. $[0;\pi]$ pour cos, $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ pour sin et $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ pour tan.

Chapitre 9

Équations et géométrie complexes

Points de cours les plus importants

- Racines carrées.
- Racines n-ièmes.
- Relations coefficients-racines.
- Équations du second degré.
- Utilisation du rapport $\dfrac{c-a}{b-a}$ en géométrie.

Méthodes et techniques à connaître

- Trouver les racines carrées d'un complexe, que ce soit sous forme algébrique ou géométrique.
- Résolution des équations du second degré.
- Déterminer les racines n-ièmes d'un complexe. (A l'aide des racines n-ièmes de l'unité.)
- Résoudre les systèmes produit-somme.
- Écrire l'expression d'une transformation du plan en complexe.

A garder à l'esprit

- Dans le cas général, les solutions d'une équation du second degré ne sont ni opposées, ni conjuguées.
- Ne pas écrire $\sqrt{\Delta}$! Encore et toujours, cette notation n'est valide que si Δ est un réel positif.
- C'est pareil pour $z^{\frac{1}{n}}$, ou plus généralement pour une puissance non-entière. Cette notation n'est valide que si z est un réel positif.
- Vocabulaire : Les polynômes ont des racines, les équations ont des solutions. Ne pas mélanger les deux.
- Rédaction : Δ, δ, z_0, z_1, z_2 sont simplement des lettres et n'ont pas de sens propre. Vous devez préciser que Δ est le discriminant, que δ en est une racine carrée et que z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation.

Chapitre 10
Intégrales et primitives

Points de cours les plus importants

- Toutes les fonctions continues ont des primitives.
- Forme des primitives d'une fonction continue.
- Primitives usuelles.
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- Théorème d'intégration par parties.
- Théorème du changement de variable.

Méthodes et techniques à connaître

- Linéariser un polynôme trigonométrique. (Voir Chap. 3,4,5).
- Savoir ramener une fonction rationnelle dont le dénominateur est de degré au plus 2 (et le numérateur de degré au plus 1) à une forme intégrable facilement (et l'intégrer).
- Savoir effectuer et rédiger une intégration par partie (et savoir l'appliquer aux fonctions multipliées par un polynôme).
- Savoir effectuer et rédiger un changement de variable en pratique.
- Savoir intégrer les fonctions du type $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$ en passant en complexes.

A garder à l'esprit

- On intègre uniquement sur des intervalles, pas sur des parties de $\mathbb{R}$ quelconques.
- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ est $x \mapsto \dfrac{-1}{2x^2}$.
- Ne pas oublier d'indiquer la variable d'intégration dans l'intégrale (par $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x$,...).
- Ne pas oublier de dire que vous intégrez par partie.
- Une variable qui apparaît dans les bornes ne peut pas être la variable d'intégration. Autrement dit, $\int_0^x \dots \mathrm{d}x$ n'a aucun sens.
- Si F et G sont des primitives de f et g, alors FG n'est PAS une primitive de fg.
- Lorsque l'on calcule $\int u'v$ en intégrant par parties. Ne pas définir u', mais u.

Chapitre 11
Équations différentielles linéaires

Points de cours les plus importants

- Solutions de l'équation linéaire homogène d'ordre 1.
- Solutions de l'équation linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants (à valeurs complexes ou à valeurs réelles).
- Structure des solutions des équations différentielles linéaires.
- Principes de superposition.
- Existence et Unicité des solutions aux problèmes de Cauchy.

Méthodes et techniques à connaître

- Recherche d'une solution particulière dans les cas simples à l'ordre 1. (Second membre constant, polynomial, exponentiel, etc...)
- Méthode de la variation de la constante (ordre 1).
- Recherche d'une solution particulière lorsque le second membre est un polynôme (ordre 2).
- Recherche d'une solution particulière lorsque le second membre est une exponentielle (ordre 2).
- Recherche d'une solution particulière lorsque le second membre est un cosinus/sinus (ordre 2).

A garder à l'esprit

- Une solution d'équation différentielle doit d'abord être dérivable (deux fois dérivable si on est à l'ordre 2). Ne pas oublier de le justifier.
- On ne dit pas "solution homogène", mais "solution de l'équation homogène".
- On ne cherche pas "la" solution particulière, mais "une" solution particulière.
- Ne pas confondre les constantes et les paramètres dans l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants à valeurs réelles.
- Les théorèmes du cours ne s'appliquent que pour les équations différentielles des types $y' + a(t)y = b(t)$ ou $y'' + ay' + by = c(t)$. Si l'on est pas exactement dans l'un de ces cas, il faut d'abord s'y ramener.
- Si l'on raisonne par équivalence, ne pas oublier les $\forall t$. Par exemple, on écrira
f solution de $y' + a(t)y = b(t) \iff \forall t \in I,\ f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$.

Chapitre 12
Applications

Points de cours les plus importants

- Définitions de restrictions et prolongement.
- Image directe et image réciproque.
- Toutes les définitions d'injectivité, surjectivité, bijectivité.
- Bijection réciproque.
- Application identité.

Méthodes et techniques à connaître

- Techniques sur les ensembles : Savoir montrer une inclusion, une égalité.
- Montrer qu'une application est injective en revenant à la définition avec quantificateurs.
- Montrer qu'une application $u : E \to F$ est surjective en montrant que $u(x) = y$ a des solutions pour tout $y \in F$.
- Décider si une application $u : E \to F$ est bijective en comptant les solutions de $u(x) = y$ pour tout $y \in F$.
- Savoir montrer qu'une application est bijective à l'aide de sa réciproque.

A garder à l'esprit

- Si $u : E \to F$ est une application, tout élément de E doit avoir une et une seule image par u, sinon u n'est pas bien définie.
- $u^{-1}(A)$ où A est un ensemble N'EST PAS l'image directe de A par u^{-1} en général, car en général u^{-1} n'existe pas.
- $u^{-1}(A)$ où A est un ensemble est toujours défini, mais $u^{-1}(x)$ où x est un élément de l'ensemble d'arrivée de u n'existe que si u est bijective.
- La composition n'est pas commutative : En général, $f \circ g \neq g \circ f$, même lorsque les deux sont bien définies.

Chapitre 13
Arithmétique

Points de cours les plus importants

- Définition de diviseur/multiple.
- Théorème de division euclidienne.
- Définitions de PGCD et PPCM.
- Si a et b divisent n, alors PPCM(a, b) divise n.
- Définition de nombre premier.
- Théorème de décomposition en facteurs premiers.
- Théorème d'Euclide.

Méthodes et techniques à connaître

- Trouver un PGCD par l'algorithme d'Euclide.
- Décomposer un petit entier en facteurs premiers.
- Déterminer PGCD et PPCM de deux nombres entiers lorsque l'on dispose de leurs décompositions en facteur premiers.

A garder à l'esprit

- 0 et 1 ne sont pas premiers.
- 0 est multiple de tous les entiers, mais ne divise que lui-même.
- Attention à l'inégalité sur le reste lorsque l'on effectue la division euclidienne de a par b. Il ne faut pas l'oublier, et il ne faut pas se tromper dans les inégalités larges/strictes : $0 \leqslant r < b$.

Chapitre 14
Réels

Points de cours les plus importants

- Majorant, minorant, plus grand élément, plus petit élément, borne supérieure, borne inférieure.
- Propriété de la borne supérieure.
- Intervalles de $\mathbb{R}$ (définition et caractérisation).
- Partie entière (définition et graphe).

Méthodes et techniques à connaître

- Déterminer des bornes supérieures/inférieures.
- Utilisation d'encadrement pour résoudre les équations faisant intervenir des parties entières.

A garder à l'esprit

- La partie entière d'un nombre négatif n'est pas "la partie du nombre avant la virgule". Par exemple, $\lfloor -3,5 \rfloor = -4$.
- La partie entière est une fonction usuelle, mais elle n'est pas continue.

Chapitre 15
Suites

Points de cours les plus importants

- Vocabulaire sur les suites.
- Définition de la convergence de suite vers une limite finie/infinie.
- Suites adjacentes + théorème.
- Passage à la limite dans les inégalités.
- Théorème des gendarmes.
- Théorèmes de la limite monotone.
- Croissances comparées.
- Critère de convergence d'une suite géométrique (y compris raison complexe).

Méthodes et techniques à connaître

- Déterminer la monotonie d'une suite en étudiant $u_{n+1} - u_n$ ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
- Déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique.
- Déterminer le terme général d'une suite récurrente double.
- Multiplier par la quantité conjuguée pour déterminer la limite d'une différence de deux racines.
- Montrer qu'une suite n'a pas de limite grâce aux suites extraites.

A garder à l'esprit

- Concernant les suites adjacentes, il faut bien faire la différence entre les hypothèses et le résultat. En particulier, on ne suppose pas que les deux suites sont convergentes.
- On ne peut pas passer à la limite une expression avec un exposant dépendant de n. Il faut forcément passer à l'exponentielle.
- Ne pas confondre u_n et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Lorsque u est défini par une somme du type $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} w_k$, le terme u_{2n} est la somme jusqu'à $2n$, et non pas la somme d'un terme sur deux. Autrement dit, $u_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} w_k$.

Chapitre 16
Matrices

Points de cours les plus importants

- Formule du produit matriciel.
- Règles de calcul matriciel.
- Transposée et propriétés des transposées.
- Matrice associée à un système.
- Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes.
- Définition des matrices triangulaires, diagonales, scalaires, identité.
- Binôme de Newton pour les matrices carrées.
- Inverse et propriétés des inverses.
- Matrices symétriques.

Méthodes et techniques à connaître

- Savoir effectuer rapidement les opérations matricielles.
- Savoir déduire qu'une matrice est inversible d'un calcul du type $A^3 - 3A^2 + 4A$.
- Savoir déterminer si une matrice est inversible et donner son inverse par pivot.

A garder à l'esprit

- Attention à la taille dans les produits de matrices. AB n'a de sens que si le nombre de colonnes de A est le nombre de lignes de B.
- Le produit matriciel ne commute pas !
- On ne peut simplifier une égalité par une matrice que si elle est inversible.
- Il n'y a pas de règle "produit nul". Un produit de matrices peut être nul sans qu'aucun des facteurs ne le soit.
- On ne peut pas inverser de matrice non-carrée.
- Quand on factorise une expression par une matrice, cela fait apparaître des matrices identités. Par exemple : $A^2 - A = A(A - \mathrm{I}_n)$.
- On ne peut pas diviser par une matrice. En revanche, on peut multiplier par l'inverse d'une matrice, SI elle est inversible.
- Lorsque l'on détermine un inverse de matrice, on peut échelonner par lignes ou échelonner par colonnes, mais il ne faut surtout pas mélanger les deux !
- Un pivot doit toujours être non-nul. Il faut notamment le prendre en compte lorsqu'il dépend d'un paramètre.

Chapitre 17
Polynômes.

Points de cours les plus importants

- Opérations sur les polynômes.
- Degré et lien avec les opérations.
- Polynôme dérivé.
- Formule de Taylor.
- Formule de Leibniz
- Théorème de la division euclidienne.
- Définition et caractérisation de racine.
- Définition et caractérisation de racine de multiplicité n.
- Polynômes irréductibles et factorisations dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Méthodes et techniques à connaître

- Division euclidienne de polynômes en pratique.
- Factoriser des polynômes (racines évidentes, conjugués, racines de l'unité, etc...)
- Un polynôme non-nul a autant de racines complexes avec multiplicité que son degré.
- Chercher d'abord le degré des solutions lorsque l'on résout une équation polynomiale.
- Décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle à pôles simples.

A garder à l'esprit

- Un polynôme n'est pas une fonction.
- α et $\overline{\alpha}$ sont racines de P avec la même multiplicité UNIQUEMENT si P est à coefficients réels.
- On ne peut supposer que le coefficient dominant est non-nul que si le polynôme n'est pas nul.
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$ uniquement lorsque $\deg(Q) \geqslant 1$.
- Tous les polynômes de degré 2 ne sont pas forcément irréductibles dans $\mathbb{R}$.
- « Un polynôme non-nul a autant de racines avec multiplicité que son degré » n'est vrai que dans $\mathbb{C}[X]$.

Chapitre 18
Limites des fonctions réelles

Points de cours les plus importants

- Définitions de limites. (Toutes, il faut pouvoir les retrouver en réfléchissant).
- Limite finie en $a \Rightarrow$ bornée au voisinage de a.
- Limite à gauche, à droite.
- Opération sur les limites (y compris la composition).
- Passage à la limite dans les inégalités.
- Théorème des gendarmes.
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Théorème des fonctions monotones.

Méthodes et techniques à connaître

- Techniques de calcul de limites "habituelles" : Quantité conjuguée pour les racines, encadrement des cos et sin, factorisation par le terme dominant des les quotients.
- Savoir montrer qu'une fonction n'a pas de limite à l'aide de deux suites.
- Montrer qu'une limite existe en montrant que la limite à gauche, la limite à droite, et la valeur de la fonction sont la même.

A garder à l'esprit

- La seule limite possible de f en un point a **où elle est définie** est $f(a)$.
- En revanche, $\lim\limits_{a^+} f$ et $\lim\limits_{a^-} f$ peuvent être différents de $f(a)$.
- Quand on passe une inégalité à la limite, elle devient large.
- Quand on fait un passage à la limite dans une inégalité, il faut s'assurer d'abord que les limites existent.
- Dans le théorème des gendarmes, on ne suppose pas que la fonction a une limite, c'est un résultat du théorème.
- Tous les théorèmes faisant appel à des comparaisons ou au sens de variation n'ont pas de sens pour des fonctions à valeurs complexes.

Chapitre 19
Continuité des fonctions réelles

Points de cours les plus importants

- Définition de continuité.
- Une fonction continue en un point est bornée à son voisinage.
- Composition limite de suites - fonctions continues.
- Limites des fonctions monotones.
- Théorème des valeurs intermédiaires. (+Extension à un intervalle ouvert)
- Théorème des bornes atteintes.
- Théorème de la bijection.

Méthodes et techniques à connaître

- Étudier la continuité en un point en comparant la limite à gauche, la limite à droite, et la valeur de la fonction.
- Savoir prolonger une fonction par continuité.
- Savoir montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point à l'aide d'une suite.
- Passer par une fonction auxiliaire pour utiliser le TVI, comme dans l'exercice du cours montrant que $f : [a, b] \to [a, b]$ continue a toujours un point fixe.
- Savoir montrer qu'une valeur est atteinte une unique fois par une fonction à l'aide de la continuité et la stricte monotonie.

A garder à l'esprit

- On ne peut pas prouver qu'une équation à une unique solution avec le TVI. Il faut utiliser le théorème de la bijection et donc montrer une stricte monotonie.
- Lorsque l'on écrit l'intervalle $f(I)$ dans le carde du théorème de la bijection, attention à bien écrire l'intervalle « dans le bon sens ». $[0; +\infty[$ et $] + \infty; 0]$, ce n'est pas la même chose.
- Le théorème de la bijection ne montre pas que f est une bijection mais qu'elle réalise une bijection de I sur $f(I)$.
- Lorsque l'on utilise un des « gros » théorèmes, il faut bien en préciser toutes les hypothèses et le nom. Même si elles sont évidentes à vérifier ou précisées une ligne au-dessus dans l'énoncé. Le but est de montrer que l'on connait parfaitement l'énoncé du théorème.

Chapitre 20
Dérivabilité des fonctions réelles

Points de cours les plus importants

- Définition de dérivabilité.
- Dérivable implique continue.
- Formules et conditions d'opérations sur les dérivées : sommes, produits, inverses, quotients, composées, réciproques.
- Définition de dérivée n-ième et des classes $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$.
- Théorème et formule de Leibniz.
- Théorème des extrema locaux.
- Théorème de Rolle.
- Théorème des accroissements finis.
- Inégalité des accroissements finis.
- Théorème de la limite de la dérivée.

Méthodes et techniques à connaître

- Savoir mener une étude de dérivabilité par étude du taux d'accroissement.
- Calculer les dérivées (éventuellement n-ièmes) de fonctions « like a boss ».
- Estimer l'erreur commise par une approximation grâce à une IAF.

A garder à l'esprit

- Dérivable implique continue. Pas le contraire.
- Attention aux hypothèses des « gros théorèmes ». En particulier, on demande souvent f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
- Le lien sens de variation $\leftrightarrow$ signe de la dérivée ne marche que sur un intervalle.
- Ne pas inventer de théorème. Si ce n'est pas dans le cours, il y a une bonne raison. En général, cette raison est que c'est faux.
- Le théorème de la limite de la dérivée ne s'applique qu'une fois qu'on a prouvé que f est continue.
- Tout comme la notation "prime", la notation $f^{(n)}$ est réservée aux fonctions. On ne peut donc pas écrire $(x^5)^{(3)}$.

Chapitre 21
Comparaison des fonctions réelles

Points de cours les plus importants

- Définitions de $o, O, \sim$ pour les fonctions et les limites.
- Caractérisations par les quotients.
- Composition avec une limite.
- Équivalents classiques. (limite finie non-nulle, polynômes, fonctions usuelles)

Méthodes et techniques à connaître

- Obtenir un équivalent en un point grâce à une dérivée non-nulle.
- Obtenir un équivalent de $\ln(u(x))$.
- Passer à l'exponentielle pour trouver des équivalents d'expressions du type $f(x)^{g(x)}$.

A garder à l'esprit

- Pas d'addition d'équivalents.
- Pas de composition d'équivalents par une fonction.
- Pas de fonctions ou de suites équivalentes à 0.
- Attentions aux fonctions qui s'annulent une infinité de fois au voisinage du point considéré.
- L'approximation d'une fonction par sa tangente n'est valable QUE si la dérivée est non-nulle.

Chapitre 22
Développements limités

Points de cours les plus importants

- Formule de Taylor-Young.
- Définition de DL.
- Unicité du DL.
- Intégration d'un DL.
- Développements limités classiques.
- Un DL à l'ordre 0 équivaut à l'existence d'une limite finie.
- Un DL à l'ordre 1 équivaut à l'existence d'une dérivée.

Méthodes et techniques à connaître

- Calculs de DL de fonctions réelles à l'aide des opérations de somme, produit, composition, quotient.
- Prolonger une fonction par continuité à l'aide d'un DL.
- Recherche de tangente et position relative de courbe et tangente.
- Recherche d'asymptote et position relative de courbe et asymptote.
- Recherche d'extremum.
- Optimisation de calcul de DL pour gagner du temps.

A garder à l'esprit

- Deux fonctions différentes peuvent avoir le même DL en un point.
- On ne peut pas dériver les DL.
- Une fonction ayant un DL à l'ordre $n \geqslant 2$ n'est pas forcément n fois dérivable.
- Les puissances apparaissant dans un DL doivent être inférieure ou égale à l'ordre du DL, qui est la puissance dans le $o(x^n)$.
- Ne pas déduire de propriétés globales (parité, signe, etc...) à partir du DL d'une fonction.

Chapitre 23
Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Points de cours les plus importants

- Si f est continue et u converge vers un réel, c'est forcément vers un point fixe de f.
- Partie stable par f.
- Savoir ce qu'il se passe lorsque f est monotone. (Comprendre les dessins "en escalier" et "en spirale")
- Fonction contractante.

Méthodes et techniques à connaître

- Montrer que u est bien définie grâce à une partie stable.
- Obtenir le sens de variation de u en étudiant le signe de $f(x) - x$.
- Déterminer les points fixes de f en étudiant les zéros de $f(x) - x$ (souvent par des théorèmes de la bijection).
- Montrer qu'une fonction est contractante par inégalité des accroissements finis.
- Montrer que si f est contractante, u converge forcément.

A garder à l'esprit

- Ne pas refaire la récurrence pour justifier que la suite est bien définie. Une partie stable suffit.
- Le sens de variation de f n'est pas forcément celui de la suite u.
- Une fonction 1-lipschitzienne n'est pas contractante.

Chapitre 24
Géométrie plane

Points de cours les plus importants

- Base et repère du plan (et leurs attributs éventuels).
- Produit scalaire, définition, formule dans une B.O.N., propriétés
- Matrice d'une famille de vecteurs dans une base, déterminant d'une matrice 2×2, déterminant d'une famille de deux vecteurs dans une base.
- Produit mixte, définition, lien avec le déterminant dans une B.O.N.D., propriétés.
- Formule de la distance d'un point à une droite.
- Équation d'un cercle.
- Nature de l'intersection Cercle-Droite.
- Caractérisation d'un cercle par son diamètre.

Méthodes et techniques à connaître

- Lire un vecteur normal et un vecteur directeur à partir de l'équation d'une droite.
- Obtention de la représentation paramétrique d'une droite.
- Déterminer une équation de droite par une équivalence avec un produit scalaire nul ou un déterminant nul.
- Déterminer une intersection d'objets en résolvant un système.
- Passer de l'équation d'un cercle à ses caractéristiques et réciproquement.

A garder à l'esprit

- $\overrightarrow{u}(a, b)$ est un vecteur normal de la droite d'équation $ax+by+c=0$, PAS un vecteur directeur.
- $(1, 2)$ n'est pas un point, mais les coordonnées d'un point.
- $ax + by + c = 0$ n'est pas une droite, mais une équation de droite.
- $x + 1$ n'est pas une équation de droite. $x + 1 = 0$ en est une.
- Lorsque l'on cherche une équation d'un ensemble par équivalence, il faut raisonner sur un point quelconque. SURTOUT PAS DE « Soit $M \in D$. $M \in D \Leftrightarrow \dots$ ».

Chapitre 25
Géométrie spatiale.

Points de cours les plus importants

- Base et repère de l'espace (et leurs attributs éventuels).
- Produit scalaire, définition, formule dans une B.O.N., propriétés.
- Produit vectoriel, définition, formule dans une B.O.N.D., propriétés.
- Matrice d'une famille de vecteurs dans une base, déterminant d'une matrice 3×3, déterminant d'une famille de trois vecteurs dans une base.
- Produit mixte, définition, lien avec le déterminant dans une B.O.N.D., propriétés.
- Formule de la distance d'un point à un plan.
- Équation d'une sphère.
- Nature de l'intersection Sphère-Droite et Sphère-Plan.

Méthodes et techniques à connaître

- Lire un vecteur normal à partir de l'équation d'un plan.
- Obtenir une d'équation cartésienne ou de la représentation paramétrique d'un plan.
- Obtenir un système d'équations cartésiennes ou la représentation paramétrique d'une droite.
- Déterminer le vecteur directeur d'une droite définie par intersection de deux plans.
- Déterminer une intersection d'objets en résolvant un système.
- Passer de l'équation d'une sphère à ses caractéristiques et réciproquement.

A garder à l'esprit

- $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ est un vecteur normal du plan d'équation $ax + by + c = 0$, PAS un vecteur directeur.
- Une droite ne peut pas être déterminée par une unique équation cartésienne linéaire. Il en faut deux.
- $ax + by + cz + d = 0$ est toujours l'équation d'un plan, jamais d'une droite.
- Un centre et un rayon ne suffisent pas à définir un cercle dans l'espace. Il faut aussi préciser un plan dans lequel il se trouve.
- Lorsque l'on cherche une équation d'un ensemble par équivalence, il faut raisonner sur un point quelconque. SURTOUT PAS DE « Soit $M \in D$. $M \in D \Leftrightarrow \ldots$ ».

Chapitre 26
Espaces vectoriels.

Points de cours les plus importants

- Exemples d'espaces vectoriels.
- Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.
- Caractérisation des sous-espaces vectoriels et exemples.
- Sommes de sous-espaces vectoriels.
- Sommes directes de sous-espaces vectoriels.
- Caractérisations des sommes directes.
- Sous-espaces vectoriels supplémentaires.
- Caractérisations des supplémentaires.

Méthodes et techniques à connaître

- Savoir calculer dans un espace vectoriel.
- Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E par la caractérisation.
- Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E en l'écrivant comme un espace engendré par une famille.
- Montrer que deux espaces sont supplémentaires par analyse-synthèse.

A garder à l'esprit

- Le vecteur nul d'un espace vectoriel dépend de l'espace en question. Cela peut-être le nombre 0, une fonction nulle, le polynôme nul, la suite nulle, une matrice nulle, etc...
- Lorsque les vecteurs peuvent avoir des termes complexes, il faut se demander si l'on considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- Pour montrer qu'un espace n'est PAS un sous-espace vectoriel, il suffit d'un unique contre-exemple. Pas besoin de faire un calcul de combinaison linéaire en toute généralité.
- Attention à la rédaction : Deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans un espace vectoriel qui les contient tous les deux.

Chapitre 27
Espaces vectoriels de dimension finie.

Points de cours les plus importants

- Définitions de famille liée/libre.
- Définitions de famille génératrice.
- Définitions de base.
- Existence et unicité des coordonnées dans une base.
- Théorème de la base extraite.
- Théorème de la base incomplète.
- Définition de dimension pour un espace de dimension finie.
- Dimension des espaces vectoriels classiques ($\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\overrightarrow{\mathcal{D}}$, $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, $\overrightarrow{\mathcal{E}}$).
- Bases canoniques des espaces vectoriels classiques ($\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\overrightarrow{\mathcal{D}}$, $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, $\overrightarrow{\mathcal{E}}$).
- Lien entre nombre de vecteurs et familles libres/génératrices/base.
- Découpage de familles libres.
- Caractérisation des supplémentaires en dimension finie.
- Existence d'un supplémentaire en dimension finie.
- Formule de Grassmann.
- Rang d'une famille de vecteurs ou d'une matrice.
- Lien entre rang et libre/lié/génératrice/base.

Méthodes et techniques à connaître

- Montrer qu'une famille est libre (en particulier le cas d'une famille de fonctions réelles).
- Montrer qu'une famille est génératrice d'un espace vectoriel.
- Une famille de polynômes non-nuls de degrés différents est libre.

A garder à l'esprit

- Rédaction : Une famille est toujours génératrice de quelque chose.
- Pour pouvoir rajouter un vecteur à une famille libre et qu'elle reste libre, il faut vérifier que ce vecteur N'EST PAS une combinaison linéaire de la famille.
- Pour pouvoir retirer un vecteur à une famille génératrice et qu'elle reste génératrice, il faut vérifier que ce vecteur EST une combinaison linéaire de la famille.
- $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ et non pas n.

Chapitre 28
Applications linéaires.

Points de cours les plus importants

- Définition et caractérisation des applications linéaires (connaître le vocabulaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire).
- $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel (et règles de calcul).
- Réciproque d'un isomorphisme.
- Noyau et image. Ce sont des espaces vectoriels.
- Injectif $\Longleftrightarrow \ker(f) = \{0_E\}$.
- Projecteurs : Définition, caractérisation, "sens géométrique".
- Symétries : Définition, caractérisation, "sens géométrique".
- En dim. finie, $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par les images d'une base de l'espace de départ.
- Si $\dim(E) = \dim(F)$ est finie, injectif $\Leftrightarrow$ surjectif $\Leftrightarrow$ bijectif.
- Une application linéaire est définie de manière unique par l'image d'une base.
- Rang. Théorème du rang.

Méthodes et techniques à connaître

- Montrer qu'une application est linéaire.
- Déterminer le noyau d'une application linéaire.
- Déterminer l'image d'une application linéaire en dimension finie par l'image d'une base + théorème du rang.
- Trouver les éléments caractéristiques d'un projecteur ou d'une symétrie.

A garder à l'esprit

- Attention à la notation f^2, elle signifie $f \circ f$.
- $f(0_E) = 0_F$ pour tout application linéaire et il n'y a pas besoin de le démontrer.
- Attention aux résultats qui ne sont vrais qu'en dimension finie, il bien retenir les hypothèses.
- Le théorème du rang ne parle que de dimensions, il n'assure pas que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.

Chapitre 29
Ensembles finis et dénombrement.

Points de cours les plus importants

- Lien entre cardinaux et injectivité/surjectivité/bijectivité.
- Équivalence des 3 quand les cardinaux sont égaux.
- Opérations et cardinaux : Union, produit cartésien.
- Nombre de parties d'un ensemble fini.
- Nombre d'applications entre deux ensembles finis.
- Définition et nombre de p-uplets d'un ensemble fini.
- Définition et nombre de p-arrangements d'un ensemble fini.
- Définition et nombre de permutations d'un ensemble fini.
- Définition et nombre de parties à p éléments d'un ensemble fini.

Méthodes et techniques à connaître

- Utilisation du principe multiplicatif.
- Utilisation de partitions.
- Savoir reconnaître si l'on est dans un cas de p-listes, de p-arrangements, de parties à p éléments ou aucun des trois. (Ordre ? Distincts ?)
- Lire une fois la partie "cardinaux infinis" pour la culture.
- Connaître ses classiques (nombres d'anagrammes d'un mot avec des lettres se répétant, nombre de mains de 13 cartes bicolores, nombre de p-uplets de $[\![1, n]\!]$ strictement croissants (Exemple du cours)).

A garder à l'esprit

- Ne pas mettre de l'ordre là où il n'y en a pas (typiquement, une main dans un jeu de cartes ou un tirage de loterie).
- Le principe multiplicatif ne s'applique que lorsque le nombre de possibilités ne dépend pas des choix précédents.
- Bien vérifier que les cas sont disjoints pour appliquer le principe de partition.

Chapitre 30
Calculs de déterminants.

Points de cours les plus importants

- Propriétés du déterminant (Linéarité par rapport aux colonnes, antisymétrie, $\det(\mathrm{I}_n) = 1$).
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- Lien entre opérations élémentaires sur lignes et colonnes et déterminant.
- Déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire.
- $\det(AB) = \det(BA)$.
- Inversibilité et déterminant.
- $\det(A) = \det(A^T)$.
- Déterminant d'une famille de vecteurs en dimension finie.
- Déterminant d'un endomorphisme en dimension finie.

Méthodes et techniques à connaître

- Calcul en taille 2.
- Calcul d'un déterminant par pivot.
- Savoir développer par rapport à une ligne ou une colonne.
- Repérer des combinaisons linéaires de colonnes/lignes intéressantes.
- Obtenir des relations de récurrences pour calculer des déterminants de taille quelconque.
- Montrer qu'une famille d'un espace vectoriel est une base à l'aide d'un déterminant.
- Montrer qu'une application linéaire est inversible grâce à un déterminant.

A garder à l'esprit

- Le déterminant n'a de sens que pour les matrices carrées !
- Ne pas oublier les $(-1)^{i+j}$ lorsque l'on développe par rapport à une ligne ou une colonne.
- Lorsque l'on échange deux lignes ou deux colonnes, le déterminant change de signe.
- Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne et chaque ligne, mais PAS par rapport aux matrices. Donc $\det(\lambda A) \neq \lambda \det(A)$ et $\det(A+B) \neq \det(A)+\det(B)$.

Chapitre 31
Matrices en algèbre linéaire.

Points de cours les plus importants

- Application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et règles de calculs.
- Lien entre isomorphisme et matrice inversible.
- Matrices de passages d'une base à une autre.
- Inverses des matrices de passage.

Méthodes et techniques à connaître

- Écrire la matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
- Calculer le rang d'une famille de vecteurs et en déduire les caractéristiques de la famille.
- Savoir écrire la matrice d'une application linéaire.
- Déterminer l'image d'un vecteur par une application linéaire matriciellement.
- Composer des applications linéaires matriciellement.
- Effectuer un changement de base d'un vecteur.
- Effectuer un changement de base d'une matrice d'une application linéaire.
- Déterminer matriciellement le rang d'un endomorphisme.
- Déterminer matriciellement des bases de l'image et du noyau d'un endomorphisme.

A garder à l'esprit

- Attention à l'ordre des bases dans l'écriture des matrices de passage.
- Bien vérifier que les bases coïncident lorsque l'on multiplie des matrices en vue de composer des applications linéaires.
- Seules les matrices carrées peuvent être des matrices d'isomorphismes.
- La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$, dans ce sens-là.
- La matrice de Id est I_n uniquement si les bases de départ et d'arrivée sont les mêmes.
- Tout ceci ne marche qu'en dimension finie. Si l'on doit travailler dans $\mathbb{K}[X]$, on peut éventuellement se ramener à $\mathbb{K}_n[X]$ pour une certaine valeur de n.
- Rédaction : Toujours bien préciser dans quelle base on travaille.
- Ne pas confondre rang et dimension. Le terme "dimension" est réservé aux espaces vectoriels tandis que les familles de vecteurs et matrices ont un rang.

Chapitre 32
Probabilités et variables aléatoires

Points de cours les plus importants

- Vocabulaire des probas (univers, évènements, incompatible, impossible, etc...)
- Système complet d'évènements.
- Définition de probabilité.
- Univers image et loi d'une variable aléatoire.
- Lois usuelles de variables aléatoires.
- Lois marginales.

Méthodes et techniques à connaître

- Savoir expliciter l'univers d'une expérience. (Étape de modélisation)
- Reconnaître l'utilisation de la probabilité uniforme (et donc du dénombrement) à travers les mots-clés "pièce équilibrée", "dé non-truqué", "équiprobable", "au hasard",etc...
- Reconnaître les situations des autres lois usuelles.
- Définir une probabilité en donnant les probabilités des évènements élémentaires.
- Déterminer la loi d'une variable aléatoire.
- Déterminer une loi conjointe.

A garder à l'esprit

- Pas de probabilités plus grandes que 1 !
- Pas de probabilités négatives non plus ! ! !
- Donnez des noms à vos évènements.
- Lorsqu'il y a plusieurs répétitions d'une expérience, ne pas utiliser le même nom pour chacune. Par exemple, si on joue 3 fois à pile ou face, on ne peut pas définir d'évènement P :« Obtenir Pile ». Il faut définir P_1, P_2, P_3.
- Les probabilités ne sont pas toutes uniformes.

Chapitre 33
Conditionnement et indépendance.

Points de cours les plus importants

- Probabilité conditionnelle.
- Formule des probabilités composées.
- Formule des probabilités totales.
- Formule de Bayes.
- Événements indépendants.
- Variables aléatoires indépendantes.
- La somme de variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre et mutuellement indépendantes suit une loi binomiale.

Méthodes et techniques à connaître

- Savoir traduire les "raisonnements sur arbres" par des résultats du cours.
- Obtenir des formules de récurrence grâce aux probabilités totales.
- Savoir utiliser l'indépendance de variables aléatoires.

A garder à l'esprit

- Un arbre, c'est bien pour comprendre, mais ce n'est pas une justification. Les "raisonnements sur l'arbre" doivent être justifiés proprement par des résultats du cours.
- On ne peut conditionner que par un évènement de probabilité non-nulle.
- On ne peut pas parler "d'évènement conditionnel A sachant B". La probabilité de A sachant B a un sens, mais ce n'est pas la probabilité d'un évènement de Ω.
- Dès qu'il y a au moins trois événements, « indépendants » et « deux à deux indépendants » ne veulent pas dire la même chose.

Chapitre 34
Probabilité 3 : Espérance et variance

Points de cours les plus importants

- Espérance, variance, écart-type d'une variable aléatoire réelle.
- Propriétés de l'espérance.
- Formule de transfert.
- Formule de König-Huygens.
- Espérance et variance de variables indépendantes.
- Covariance de deux variables aléatoires, propriétés de la covariance.
- Espérance et variance des variables suivant des lois usuelles.
- Inégalité de Bienaymé - Tchebytchev.

Méthodes et techniques à connaître

- Déterminer l'espérance et la variance d'une V.A.R. par thm de transfert.
- Calculer une covariance.
- Estimer un intervalle de confiance grâce à l'inégalité de Bienaymé - Tchebytchev.

A garder à l'esprit

- On ne fait pas de magie : Il faut justifier les calculs par des résultats du cours : Indépendance, proba conditionnelle, propriétés de l'espérance, évènements incompatibles...
- Ω n'est pas important dans ces exercices, ce qui compte c'est l'univers image et la loi de la variable aléatoire.
- Indépendant implique dé-corrélé, la réciproque est fausse.

Chapitre 35
Intégration sur un segment.

Points de cours les plus importants

- Avoir une idée de la construction de l'intégrale.
- Propriétés basiques. (Croissance, valeur absolue, positivité, Chasles)
- Le théorème fondamental de l'analyse.
- Théorème sur les fonctions positives d'intégrale nulle.
- Définition et convergence des sommes de Riemann.
- Les trois formules de Taylor.

Méthodes et techniques à connaître

- Étudier la convergence d'une somme grâce aux sommes de Riemann.
- Savoir estimer une erreur d'approximation grâce à Taylor-Lagrange.
- Penser à majorer $\left|\int f\right|$ par $\int |f|$.
- Revoir les techniques d'IPP et de changement de variable.

A garder à l'esprit

- La dérivée de $x \mapsto \int_a^x f$ est f.
- Ne pas se tromper dans les n et $n+1$ dans les formules de Taylor.
- Les formules de Taylor ont des hypothèses, il faut les connaître.
- Les propriétés de base de l'intégrale ne s'appliquent que lorsque les bornes sont "dans le bon sens", c'est à dire que l'on considère $\int_a^b$ avec $a \leqslant b$.
- Intégrale nulle implique fonction nulle n'est valable que lorsque f est positive et continue.
- Lorsqu'il y a plusieurs variables dans une intégrale ("x" et "t" par exemple), attention à bien vérifier laquelle est la variable d'intégration.

Chapitre 36
Séries numériques.

Points de cours les plus importants

- Séries géométriques (définition, convergence, somme).
- Séries de Riemann (définition, critère de convergence).
- Théorème de comparaison série-intégrale.
- Principes de comparaisons pour les séries à termes positifs. (Avec $\leqslant$, équivalents, principe du O).
- Convergence absolue.

Méthodes et techniques à connaître

- Reconnaître une série grossièrement divergente.
- Comparer une série à une série de Riemann ou géométrique pour savoir si elle converge.
- Passer par la valeur absolue et la convergence absolue lorsque le terme général n'est pas de signe constant.
- Savoir mener une comparaison série-intégrale.
- Lorsque l'on étudie la convergence d'une série, les premiers termes n'ont pas d'importance.

A garder à l'esprit

- Ne pas confondre la série, ses sommes partielles et la somme de la série.
- $u_n \to 0$ n'implique SURTOUT PAS que $\sum u_n$ converge.
- Les théorèmes de comparaison ne sont valides que pour des séries A TERMES POSITIFS.
- $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
- Je répète, $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Chapitre 37
Fonctions à deux variables.

Points de cours les plus importants

- Continuité des fonctions réelles.
- Dérivée suivant un vecteur.
- Dérivées partielles.
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- Gradient.
- Règle de la chaîne.
- Points critiques.

Méthodes et techniques à connaître

- Calculer une dérivée selon un vecteur.
- Écrire un DL d'ordre 1.
- Déterminer des extremums locaux.

A garder à l'esprit

- Les résultats du cours ne fonctionnent que sur un ouvert.
- Il faut que la fonction soit de classe $\mathcal{C}^1$ pour pouvoir affirmer sans étude que les dérivées selon un vecteur existent forcément.
- Il ne suffit pas que les dérivées partielles soient nulles pour avoir un extremum.