

Théorie des groupes 2016

Corrigé contrôle continu 2

Exercice 1 Faux Exemple : $G \triangleleft G$ mais $[G : G] = 1$ pour tout groupe G .

Ou, si on préfère un contre-exemple "non-trivial", n'importe quel groupe abélien d'ordre ≥ 6 non premier. Notamment, $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $H = \{0, 3\}$. $H \triangleleft G$ car G abélien et $[G : H] = |G|/|H| = 3$.

Exercice 2

1. Remarque : Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $i \in \text{Supp}(\sigma) \Rightarrow \sigma(i) \in \text{Supp}(\sigma)$. En effet, si $\sigma(i) \neq i$, alors $\sigma(\sigma(i)) \neq \sigma(i)$ car σ bijective.

Soient τ_1 et $\tau_2 \in \mathfrak{S}_n$. Supposons que $\text{Supp}(\tau_1) \cap \text{Supp}(\tau_2) = \emptyset$. On note $\sigma = \tau_1\tau_2$ et $\gamma = \tau_2\tau_1$.

— Si $i \in \text{Supp}(\tau_1)$. Alors par la remarque, $\tau_1(i) \in \text{Supp}(\tau_1)$. Et donc $\tau_1(i) \notin \text{Supp}(\tau_2)$. D'où $\sigma(i) = \tau_1(i) = \tau_2(\tau_1(i)) = \gamma(i)$.

— De manière symétrique, si $i \in \text{Supp}(\tau_2)$, $\sigma(i) = \gamma(i)$.

— Si $i \notin \text{Supp}(\tau_1) \cup \text{Supp}(\tau_2)$ Alors $\tau_1(i) = \tau_2(i) = i$. Et donc $\gamma(i) = i = \sigma(i)$

Donc σ et γ coïncident en tout i , et donc τ_1 et τ_2 commutent.

2. $\sigma = (12345)(67)$. Par la question précédente :

$$\sigma^{2016} = (12345)^{2016}(67)^{2016} = (12345)((12345)^5)^{403}(Id)^{1008} = (12345)(Id)^{403} = (12345)$$

Exercice 3

- **2 implique 1** : Si G est cyclique d'ordre premier. Soit H un sous-groupe non-trivial de G . Alors il existe $g \neq e$ dans H . Comme l'ordre de g divise p et n'est pas 1, c'est p . Or $\langle g \rangle \subset H$ donc $|H| \geq p$. Et donc $H = G$.
- **1 implique 2** : Si G n'a pas de sous-groupe propre non-trivial. G non-trivial, donc il existe $g \neq e$ dans G . Alors $\langle g \rangle \neq \{e\}$, donc $\langle g \rangle = G$ et G est monogène. Si g est d'ordre infini, alors $G \simeq \mathbb{Z}$ et G a des sous-groupes propres. Absurde, donc G cyclique. Supposons que $|G| (= o(g))$ ne soit pas premier. Alors $o(g) = n_1n_2$ avec $n_1, n_2 > 1$. Alors g^{n_1} est d'ordre n_2 . Et donc $\langle g^{n_1} \rangle$ est un sous-groupe d'ordre n_2 , qui n'est donc ni G ni $\{e\}$. Absurde, donc $|G|$ est premier.

Exercice 4 1. $\mathfrak{A}_n = \ker \epsilon$ où $\epsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$ est le morphisme signature. Ce morphisme est surjectif donc $|\mathfrak{A}_n| = |\mathfrak{S}_n|/2 = n!/2$.

2. Supposons qu'il existe un sous-groupe H d'ordre 6 de $\mathfrak{A}_4$. Alors $[\mathfrak{A}_4 : H] = 2$ et donc H est distingué dans $\mathfrak{A}_4$.

Nous allons montrer qu'un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_4$ contenant un 3-cycle les contient tous. On commence par remarquer qu'il y a 8 3-cycles dans $\mathfrak{A}_4$. On peut le voir en disant que $\mathfrak{A}_4$ contient 1 élément neutre, 3 doubles transpositions, et donc $12 - 3 - 1 = 8$ 3-cycles.

Si H contient (123) : Alors H contient aussi $(123)^2 = (132)$. Comme H est stable par conjugaison par des éléments de $\mathfrak{A}_4$, H contient tous les conjugués de (123) et (132) par des doubles transpositions :

— $((12)(34))(123)((12)(34))^{-1} = (214)$ et $((12)(34))(132)((12)(34))^{-1} = (241)$

— $((13)(24))(123)((13)(24))^{-1} = (341)$ et $((13)(24))(132)((13)(24))^{-1} = (314)$

— $((14)(23))(123)((14)(23))^{-1} = (432)$ et $((14)(23))(132)((14)(23))^{-1} = (423)$

On a bien retrouvé 8 3-cycles distincts. H doit donc contenir tous les 3-cycles.

De plus le calcul nous dit que tout 3-cycle est conjugué dans $\mathfrak{A}_4$ à (123) ou à (132) . Donc si H contient un 3-cycle quelconque, il contient (123) ou $(132)^2$, et donc contient (123) . Donc H contient tous les 3-cycles.

C'est absurde, car il y a plus de 3-cycles que $|H|$. Donc H ne contient pas de 3-cycle. C'est absurde, car il n'y a que 4 éléments dans $\mathfrak{A}_4$ qui ne sont pas des 3-cycles.

3. Si $\mathfrak{A}_4$ était cyclique, il serait engendré par un élément g d'ordre $4!/2 = 12$. Il contiendrait alors le sous-groupe $\langle g^2 \rangle$ qui serait d'ordre 6. C'est absurde par la question précédente donc $\mathfrak{A}_4$ n'est pas cyclique.