

Théorie des groupes

Feuille d'exercices 6

12 Octobre 2015

Exercice 1 Soit \mathbb{U} l'ensemble des complexes de module 1.

1. Montrer que \mathbb{U} est isomorphe à \mathbb{R}/\mathbb{Z} .
2. Montrer que \mathbb{C}^*/\mathbb{U} est isomorphe à \mathbb{R}_+^* .

Exercice 2 Soit G un groupe, N un sous-groupe distingué de G d'indice fini $[G : N] = n$ et H un sous-groupe de G d'ordre fini s .

On suppose que n et s sont premiers entre eux, montrer que $H \subset N$.

Exercice 3 On note K un corps commutatif, et on note :

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in K \right\}$$

1. Vérifier que Γ est un sous-groupe de $GL_3(K)$
2. Montrer que $Z(\Gamma)$ est formé des matrices vérifiant $a = b = 0$, et en déduire que $Z(G)$ est isomorphe à $(K, +)$.
3. Montrer que $\Gamma/Z(\Gamma) \cong K \times K$.

Exercice 4 Soit G un groupe, et F l'ensemble des éléments ayant un nombre fini de conjugués dans G .

Montrer que $F \triangleleft G$.

Exercice 5 (Une première action de groupe) Soit G un groupe, et H un sous-groupe de G d'indice fini n . Pour tout $x \in G$, on définit l'application φ_x par :

$$\varphi_x : \begin{array}{ccc} G/H & \rightarrow & G/H \\ a.H & \mapsto & (xa).H \end{array}$$

1. Vérifier que pour tout $x \in G$, φ_x est une permutation de G/H . On définit alors Φ par :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & \mathfrak{S}(G/H) \\ x & \mapsto & \varphi_x \end{array}$$

2. Vérifier que Φ est un morphisme de groupe.
3. Montrer que G contient un sous-groupe distingué N tel que $N \leq H$ et $[G : N] \leq n!$

Culture : On a en fait regardé ce qu'on appelle l'action de G sur G/H par translation à gauche.