

Théorie des groupes

Feuille d'exercices 11

30 Novembre 2015

Exercice 1 On considère $H = \{(a, b, c), a + b + c = 0\}$ sous-groupe de \mathbb{Z}^3 . Trouver une \mathbb{Z} -base de H .

Exercice 2 Quels sont (à isomorphisme près) les groupes abéliens d'ordre 360 ?

Exercice 3 (p -groupes abéliens)

Soit $E = (x_i)_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$ une famille finie d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On dit que E est une partition de n si E est ordonnée ($x_i \leq x_{i+1}$) et $\sum_{i=1}^k x_i = n$. Les partitions de n sont en fait les façons d'écrire n comme somme d'entiers positifs.

Exemple : Les partitions de 5 sont : $(1, 1, 1, 1, 1); (1, 1, 1, 2); (1, 2, 2); (1, 1, 3); (2, 3); (1, 4); (5)$.

Soit p premier. Montrer que le nombre de groupes abéliens d'ordre p^n est égal au nombre de partitions de n en entiers.

Il est intéressant de noter que cette quantité est indépendante de p .

Exercice 4 (Sous-groupes de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$)

Soit p premier et G isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$. Combien G a-t-il de sous-groupes d'ordre p^k ($k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$). Donner une formule explicite en fonction de p, k, n .

Indication : Voir G comme un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel

Exercice 5

Soit G un groupe abélien de type fini.

1. Montrer que $\text{Aut}(G)$ est dénombrable.
2. Montrer que $\text{Aut}(G)$ est fini si et seulement si la décomposition canonique G contient au plus un facteur isomorphe à \mathbb{Z} .